非2進整数環上の直交群について (整数論)

味村, 良雄

数理解析研究所講究録
378巻 1980年 1-14

非2進整数環上の直交群について

神戸大学 理学部　　味村良雄

0. 非2進局所体上の二次空間内の格子Lの単数群を $O(L)$ とかくとき，$O(L) \subset O(M)$ をみたす格子Mはどのように特徴づけられるか？ 剰余類体が5個以上の要素を含むとき，Riehm ([3], 定理5.2) はこの問に答えている。一般の場合は，Kallman-Kneser-Stuhler ([1], 定理2, 3) が答えている。ここでは，後者の結果を変形した形でのべ（定理1），更に次の問に答える（定理2）：$O(L) = O(M)$ をみたす格子Mはどのように特徴づけられるか？

1. F を非2進局所体とする．即ち，非自明な完備離散付値をもつ体で，$\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ は標数2でない有限体である．但し，$\mathfrak{o}$ は F の整数環，$\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{o}$ のただ一つの極大イデアルである．V を F 上の正則二次空間，B, Q をそれぞれ対称双一次形式，二次形式とする．V の直交群を $O(V)$ とかく．L を V 内の格子とする，則ち V 内の有限生成 $\mathfrak{o}$-加群で $FL = V$ をみたすものである。L は $\mathfrak{o}$ 上の基底をもつ．更に非2進性より，L は

直交基底，$\{x_1, \dots, x_n\}$ とかく，をもつ．$a_i = Q(x_i)$ として

$$L = [x_1, \dots, x_n] \cong \langle a_1, \dots, a_n \rangle$$

とかく．L の単数群 $O(L)$ は次で定義される：

$$O(L) = \{\sigma \in O(V) ; L\sigma = L\}.$$

L の部分加群 L_1, L_2 があって，$L = L_1 + L_2$，$L_1 \cap L_2 = \{0\}$，$B(L_1, L_2) = \{0\}$ をみたしている時，$L = L_1 \perp L_2$ とかく。L_1 は二次空間 FL_1 の格子になっているので $O(L_1)$ は直交群 $O(FL_1)$ の部分群として定まり，次の同一視によって $O(V)$ の部分群でもある。$O(FL_1) = \{\sigma \in O(V) ; x\sigma = x \text{ for } \forall x \in FL_2\}$.

$\mathfrak{p} = \pi\mathfrak{o}$ とし，$\mathfrak{o}$ の単数群を $\mathfrak{u}$ とかく。格子 L を直交基底によって上の形に表わしたとき，すべての i について，$a_i \in \pi^r \mathfrak{u}$ のとき，L は $\mathfrak{p}^r$-modular であるという（[2]；82G).

格子 L の双対格子 $L^\#$ を次で定義する：

$$L^\# = \{x \in V ; B(x, L) \subset \mathfrak{o}\}.$$

明らかに，$L^{\#\#} = L$，$(\mathfrak{a}L)^\# = \mathfrak{a}^{-1}L^\#$ が成立する。ただし，$\mathfrak{a}$ は F の分数イデアル。次の補題 1, 2 は容易に分る。

<u>補題 1</u>．L, M を V 内の格子で $O(L) \subset O(M)$ とする。$L = L_1 \perp L_2$ ならば，$O(L_i) \subset O(M_i)$ であり，$M = M_1 \perp M_2$ である．但し，$M_i = M \cap FL_i$，$i = 1, 2$.

<u>補題 2</u>．$O(L) = O(L^\#) = O(\mathfrak{a}L)$

格子Lは，いわゆるJordan分解 $L=L_1\perp\cdots\perp L_m$ をもつ。ここで，各 L_i は $\mathfrak{p}^{r_i}$-modular であり，$r_1<r_2<\cdots<r_m$ とする（[2]; 91C）．2つのJordan分解 $L=L_1\perp\cdots\perp L_m=L'_1\perp\cdots\perp L'_{m'}$ に対して，$m=m'$，$r_i=r'_i$，が成立し，$L'_i=L_i\sigma$ $(i=1,\dots,m)$ となる $\sigma\in O(L)$ が存在する（[2]; 91:9，92:2）。LのJordan分解 $L=L_1\perp\cdots\perp L_m$ に関して，$x\in V$ は次の形に一意的にかける：

$$x=\sum_{i=1}^{m}\pi^{e_i}x_i$$

ここで，x_i は L_i の原始的要素であり，e_i は有理整数又は ∞ である。但し，$\pi^{\infty}=0$ とみなす。この表現を標準表現といおう。

$x\in V$ が $Q(x)\neq 0$ のとき，次で定まる写像 τ_x は $O(V)$ の要素となる：　τ_x ; $y\longrightarrow y-\frac{2B(x,y)}{Q(x)}x$

非2進性より $O(L)$ は $\{\tau_x\ ;\ \tau_x\in O(L)\}$ で生成されることがわかる（[2]; 92:4）。$\tau_x\in O(L)$ であるための条件を求めよう。

<u>補題3</u>　$L=L_1\perp\cdots\perp L_m$ をJordan分解とし，L_i は $\mathfrak{p}^{r_i}$-modular とする。$x=\sum_{i=1}^{m}\pi^{e_i}x_i$ を標準表現とする。このとき，$\tau_x\in O(L)$ であるための必要十分条件は，次をみたす k が存在することである：$Q(x_k)\mathfrak{o}=\mathfrak{p}^{r_k}$，$e_i\geq e_k$，$e_i+r_i\geq e_k+r_k$ $(i=1,\dots,m)$．

（証明）$\tau_x\in O(L)$ とせよ．故に，$\frac{B(x,L)}{Q(x)}x\subset L$，則ち，任意の i,j に対して，$\frac{B(x,L_i)}{Q(x)}\pi^{e_j}x_j\subset L_j$．従って $\mathfrak{p}^{r_i+e_i+e_j}\subset Q(x)\mathfrak{o}$.

今，$2e_k+r_k=\min\{2e_i+r_i\ ;\ i=1,\cdots,m\}$ とおく．$Q(x)=\sum\pi^{2e_i}Q(x_i)\in\sum\mathfrak{p}^{2e_i+r_i}=\mathfrak{p}^{2e_k+r_k}$ だから，$\mathfrak{p}^{r_i+e_i+e_j}\subset\mathfrak{p}^{2e_k+r_k}$ となり，従って $r_i+e_i+e_j\geqq 2e_k+r_k$ 及び $Q(x)\mathfrak{o}=\mathfrak{p}^{2e_k+r_k}$ を得る．これから，$e_i+r_i\geqq e_k+r_k$，$e_j\geqq e_k$ が出る。$r_k<r_i$ ならば，$Q(\pi^{e_i}x_i)\in\mathfrak{p}^{r_i+2e_i}\subset\mathfrak{p}^{r_i+2e_k}\subsetneqq\mathfrak{p}^{r_k+2e_k}$ となり，$r_k>r_i$ ならば，$Q(\pi^{e_i}x_i)\in\mathfrak{p}^{r_i+2e_i}\subset\mathfrak{p}^{r_i+2(e_k+r_k-r_i)}\subsetneqq\mathfrak{p}^{r_k+2e_k}$ となる．$\mathfrak{p}^{2e_k+r_k}=Q(x)\mathfrak{o}=\sum Q(\pi^{e_i}x_i)\mathfrak{o}$ より $Q(x_k)\mathfrak{o}=\mathfrak{p}^{r_k}$ が得られる。逆も同様の論法で分る。

$\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ が3個の要素からなる体のときに，次のような2次元格子を考え，これを双曲格子といおう．

$$H=[x,y]\cong\langle a,-a\rangle.$$

$a\mathfrak{o}=\mathfrak{p}^r$ のとき，上の双曲格子Hに対して，

$$H^+=\{z\in H\ ;\ Q(z)\pi^{-r}\equiv 1 \bmod \mathfrak{p}\}\cup\mathfrak{p}H$$

$$H^-=\{z\in H\ ;\ Q(z)\pi^{-r}\equiv -1 \bmod \mathfrak{p}\}\cup\mathfrak{p}H$$

なる格子 H^+，H^- を定義する。$\pi^{-r}a\equiv 1 \bmod \mathfrak{p}$ のとき，$H^+=[x,\pi y]$，$H^-=[\pi x,y]$ となり，$\pi^r a\equiv -1 \bmod \mathfrak{p}$ のとき，$H^+=[\pi x,y]$，$H^-=[x,\pi y]$ となる．また $H^{+\#}=\mathfrak{p}^{-r-1}H^-$ となる．直接計算によって次の補題が成立することが分る．

<u>補題 4.</u> 双曲格子Hに対して，$O(H)=O(H^+)=O(H^-)$.

一般に2つの格子 L, M に対して，$L=\mathfrak{a}M$ となる分数イデアル $\mathfrak{a}$ があるとき，$L\sim M$ とかこう。

<u>命題 1</u>　L が V 内の modular 格子，M が V 内の格子のとき，$O(L)\subset O(M)$ ならば，$M\sim L$，$M\sim L^+$ または $M\sim L^-$ である。

（証明）$n=\dim V$ とする。$n=1$ の時は容易である。$n\geqq 2$ とする。$L=[x_1,\cdots,x_n]\cong\langle\pi^r\varepsilon_1,\cdots,\pi^r\varepsilon_n\rangle$，$\varepsilon_i\in u$ とかける。補題 1 によって，$M=\mathfrak{a}_1x_1+\cdots+\mathfrak{a}_nx_n$ とかける。ただし，$\mathfrak{a}_i$ は F の分数イデアル。$x=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\in L$，$Q(x)\mathfrak{o}=\mathfrak{p}^r$ とする。明らかに，$\tau_x\in O(L)$ となるので，$\tau_x\in O(M)$ である。故に $\frac{B(x,M)}{Q(x)}x\subset M$，則ち $a_i\mathfrak{a}_i\pi^r\varepsilon_ia_j\subset Q(x)\mathfrak{a}_j$．故に $a_ia_j\mathfrak{a}_i\subset\mathfrak{a}_j$ が任意の i,j に対して成り立つ．$n\geqq 3$ とせよ．$x=x_i+x_j+a_kx_k$ を考える．但し，i,j,k は互いに相異なる．$a_k=0$ 又は $a_k=1$ ととって，$Q(x)\mathfrak{o}=\mathfrak{p}^r$ とできる．従って $\mathfrak{a}_i=\mathfrak{a}_j$ となる．則ち $M\sim L$ である。次に $n=2$ とせよ．$x=a_1x_1+a_2x_2\in L$ を考える．$a_1,a_2\in u$ で $Q(x)\mathfrak{o}=\mathfrak{p}^r$ が成り立てば $\mathfrak{a}_1=\mathfrak{a}_2$ がえられる．則ち $M\sim L$ である．任意の $a_1,a_2\in u$ に対して $a_1^2\varepsilon_1+a_2^2\varepsilon_2\in\mathfrak{p}$ ならば，任意の $a\in u$ に対して $\varepsilon_1\varepsilon_2+a^2\in\mathfrak{p}$ となり，$\varepsilon_1\varepsilon_2\equiv -1 \bmod \mathfrak{p}$ 且つ $a^2\equiv 1 \bmod \mathfrak{p}$ $(\forall a\in u)$．これから $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ は 3 個の要素から成り L は双曲型となる。$a_1=1$，$a_2=\pi$ ととって $\pi\mathfrak{a}_1\subset\mathfrak{a}_2$．同じく，$\pi\mathfrak{a}_2\subset\mathfrak{a}_1$．故に $\mathfrak{a}_2=\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{a}_1$，$\mathfrak{a}_2=\mathfrak{a}_1$ 又は $\mathfrak{a}_2=\mathfrak{p}\mathfrak{a}_1$ となり，$M\sim L$，$M\sim L^+$ 又は $M\sim L^-$ となる．

[1] の結果を次の形でのべよう。

<u>定理 1</u>　$L = L_1 \perp \cdots \perp L_m$ を Jordan 分解，L_i は $\mathfrak{p}^{r_i}$-modular とする．$O(L) \subset O(M)$ となるための必要十分条件は次の (#) の成立することである：

$$
(\#)\begin{cases}
M = \mathfrak{p}^{t_1}M_1 \perp \cdots \perp \mathfrak{p}^{t_m}M_m, \\
t_i \geqq t_j'' \ , \ t_i'' + r_i \leqq t_j + r_j \qquad \text{if} \quad r_i < r_j, \\
M_i \in \{L_i, L_i^+, L_i^-\}, \\
t_i'' = \begin{cases} t_i & (M_i = L_i \text{ のとき}) \\ t_i + 1 & (M_i \neq L_i \text{ のとき}) \end{cases}
\end{cases}
$$

(証明) $O(L) \subset O(M)$ とせよ．補題 1 と命題 1 によって，$M = \mathfrak{p}^{t_1}M_1 \perp \cdots \perp \mathfrak{p}^{t_m}M_m$，$M_i \in \{L_i, L_i^+, L_i^-\}$，とかける．$k \in \{1, \cdots, m\}$ をとり，$Q(x_k)\mathfrak{o} = \mathfrak{p}^{r_k}$ となる $x_k \in L_k$ をとる．更に，$M_k \neq L_k$ の時は $x_k \notin M_k$ であるとしておく．従って，$ax_k \in M$ と $a \in \mathfrak{p}^{t_k''}$ は同値となる．$e_i = \max\{0, r_k - r_i\}$, $i = 1, \cdots, m$，とおく．各 $i\ (\neq k)$ に対して，$B(x_i, M_i) = \mathfrak{p}^{r_i}$ となる $x_i \in L_i$ が存在する．$x = \sum_{i=1}^{m} \pi^{e_i} x_i$ とおくと，補題 3 によって，$\tau_x \in O(L)$, $Q(x)\mathfrak{o} = \mathfrak{p}^{r_k}$ となる．故に，$\tau_x \in O(M)$，則ち $\frac{B(x, \mathfrak{p}^{t_i}M_i)}{Q(x)}\pi^{e_k}x_k \subset \mathfrak{p}^{t_k}M_k \subset M$．従って，任意の $i\ (\neq k)$ に対して，$e_i + t_i + r_i - r_k + e_k \geqq t_k''$ を得る．$r_i > r_k$ ならば，$e_i = e_k = 0$，つまり $t_i + r_i \geqq t_k'' + r_k$．$r_i < r_k$ ならば，$e_i = r_k - r_i$, $e_k = 0$，つまり $t_i \geqq t_k''$．次に十分性を示そう．$\tau_x \in O(L)$ とし，$x = \sum_{i=1}^{m} \pi^{e_i} x_i$ を与えられた Jordan 分解に関する標準表現とする．3 頁にのべたことより，$\tau_x \in O(M)$ を示せば十分であ

る。補題2によって，$Q(x_k)\mathfrak{O}=\mathfrak{p}^{r_k}$，$e_i \geqq e_k$, $e_i+r_i \geqq e_k+r_k$, $(i=1,\cdots,m)$ をみたす k が存在する．この時，補題2の証明と同じようにして，$Q(x)\mathfrak{O}=\mathfrak{p}^{2e_k+r_k}$ となる．任意の i,j について $B(x_i,M_i)\mathfrak{p}^{e_i+t_i-2e_k-r_k+e_j-t_j}x_j \subset M_j$ を示せば十分である。$i=j=k$ のとき，$B(x_k,M_k)=\mathfrak{p}^{r_k}$（または $\mathfrak{p}^{r_k+1}$）が $x_k\in M_k$（または $x_k \notin M_k$）の時成立し，$ax_k\in M_k \Leftrightarrow a\in\mathfrak{O}$（または $a\in\mathfrak{p}$）が $x_k\in M_k$（または $x_k\notin M_k$）の時成立することより，上のことが分る．

$i=j=k$ でない時，$B(x_i,M_i)\subset\mathfrak{p}^{r_i}$ より，$e_i+e_j+r_i+t_i-r_k-2e_k-t_j\geqq 0$ を示せば十分である．$i<j$, $i=j$, $i>j$ に分けて，k のとり方を考慮すれば，上のことが分る．

2. 2つの（V内の）格子 L, M に対して，M が L－線型であるとは，L の任意の Jordan 分解 $L=L_1\perp\cdots\perp L_m$ に対して，M が，$M=\sum_{i=1}^{m}\mathfrak{p}^{t_i}L_i$ とかける時であると定義する．

命題2. L, M を V 内の格子とし，$L=L_1\perp\cdots\perp L_m$ を L の Jordan 分解，L_i は $\mathfrak{p}^{r_i}$-modular，$r_1<r_2<\cdots<r_m$ とする。

(1) M が L－線型ならば $O(L)\subset O(M)$ である，

(2) M が L－線型ならば，$M=\sum_{i=1}^{m}\mathfrak{p}^{t_i}L_i$ と表わしたときの指数 $t_1,\cdots,t_m$ は L の Jordan 分解のとり方によらずに決まる．

(3) $M=\sum_{i=1}^{m}\mathfrak{p}^{t_i}L_i$ の時，M が L－線型であるための必要十分条件は $t_1\geqq\cdots\geqq t_m$, $t_1+r_1\leqq\cdots\leqq t_m+r_m$ である．

(4) M が L－線型且つ L が M－線型であるための必要十分

条件は，$L \sim M$ または $L^{\#} \sim M$ であることである．

（証明） $m \geqq 2$ の時示せば十分である．$M = \sum_{i=1}^{m} \mathfrak{p}^{t_i} L_i$ が L－線型であるとせよ．$L_1 = [x_1, \cdots, x_s]$，$L_2 = [y_1, \cdots, y_t]$ とせよ．$a = Q(y_1)/Q(x_1)$ とおく．$L_1' = [x_1 + y_1, x_2, \cdots, x_s]$，$L_2' = [y_1 - a x_1, y_2, \cdots, y_t]$ は，それぞれ，$\mathfrak{p}^{r_1}$－，$\mathfrak{p}^{r_2}$－modularであり，$L = L_1' \perp L_2' \perp L_3 \perp \cdots \perp L_m$ は L の Jordan 分解となる．従って $M = \mathfrak{p}^{s_1} L_1' \perp \mathfrak{p}^{s_2} L_2' \perp \mathfrak{p}^{s_3} L_3 \perp \cdots \perp \mathfrak{p}^{s_m} L_m$ とかける．M の２つの表現を比べて，$s_1 = t_1$，$s_2 = t_2$，$t_1 \geqq t_2$，$t_1 + r_1 \leqq t_2 + r_2$ を得る．同じことをくり返して，$t_1 \geqq t_2 \geqq \cdots \geqq t_m$，$t_1 + r_1 \leqq t_2 + r_2 \leqq \cdots \leqq t_m + r_m$ となる．(3)の必要条件が示された．次に，$L^{r} = \{x \in L \,;\, B(x, L) \subset \mathfrak{p}^{r}\}$ と定めると，$L^{r_i} = \mathfrak{p}^{r_i - r_1} L_1 \perp \cdots \perp \mathfrak{p}^{r_i - r_{i-1}} L_{i-1} \perp L_i \perp \cdots \perp L_m$ だから，$B(L^{r_i}, M) = \mathfrak{p}^{r_i + t_i}$ を得る．これによって，(2) が示されたことになる．任意の $\sigma \in O(L)$ について，$L = L\sigma = \sum_{i=1}^{m} L_i \sigma$ も L の Jordan 分解故，(2) によって，$M = \sum_{i=1}^{m} \mathfrak{p}^{t_i} L_i \sigma$ $(= M\sigma)$ とかける．(1)が示された．次に(3)の十分性を示す．定理１により，$O(L) \subset O(M)$ となる．３頁でのべたことから，L の Jordan 分解は，適当な $\sigma \in O(L)$ を用いて，$L = \sum_{i=1}^{m} L_i \sigma$ とあらわされる．故に $M = M\sigma = \sum_{i=1}^{m} \mathfrak{p}^{t_i} L_i \sigma$ となり M は L－線型となる．最後に (4) を示す．十分性は明らかである．今，L は M－線型，M は L－線型とする．$M = \sum_{i=1}^{m} \mathfrak{p}^{t_i} L_i$ とかけ，(3) より $t_1 \geqq \cdots \geqq t_m$，$t_1 + r_1 \leqq \cdots \leqq t_m + r_m$ である．M のこの分解で，modular成分を適当にまとめると，M の Jordan 分

解がえられる．($p^{t_i}L_i$ は $p^{2t_i+r_i}$-modular であることに注意。)
$p^{t_i}L_i$ と $p^{t_j}L_j$ が同じ modular ならば，L が M-線型であることより，$L=p^s(p^{t_i}L_i\perp p^{t_j}L_j\perp\cdots)\perp\cdots$ となり $s+t_i=s+t_j=0$ つまり $t_i=t_j$，従って $2t_i+r_i=2t_j+r_j$ より $r_i=r_j$ となる．これから $M=p^{t_1}L_1\perp\cdots\perp p^{t_m}L_m$ は Jordan 分解であることが分り，$L=p^{-t_1}(p^{t_1}L_1)\perp\cdots\perp p^{-t_m}(p^{t_m}L_m)$ と (3) より，$-t_i\geqq -t_j$，$-t_i+(2t_i+r_i)\leqq -t_j+(2t_j+r_j)$ が $2t_i+r_i<2t_j+r_j$ の時成立する．則ち任意の i,j に対して，$t_i=t_j$ か $t_i+r_i=t_j+r_j$ が成立する．任意の i,j に対して $t_i+r_i=t_j+r_j$ が成立すれば $L^{\#}\sim M$ である．$t_s=t_k$，$s\neq k$，となる s,k があれば，$i\neq s$，$i\neq k$ なる i に対して $t_i+r_i\neq t_s+r_s$ か $t_i+r_i\neq t_k+r_k$ が成立しなければならない ($t_s+r_s\neq t_k+r_k$ 故) ので，$t_i=t_s$ か $t_i=t_k$ となり，結局 $t_i=t_s$ が任意の i に対して成り立つ．則ち $L\sim M$ である．

<u>補題 5</u>　$\dim V=2$ とせよ．L,M を V 内の格子とする．このとき，$O(L)=O(M)$ であるための必要十分条件は，次のうちの一つが成り立つことである：$L\sim M$，$L^{\#}\sim M$，$L^{+}\sim M$，$L^{-}\sim M$，$L\sim M^{+}$，$L\sim M^{-}$．

(証明) 補題 2 と 4 から十分性が分る．必要性は，L か M が modular の時は命題 1 によって，そうでない時は，命題 2 (4) によって分る．

補題 6　L, M を V 内の格子，$L=[x_1, \cdots, x_n]$, $Q(x_i)\mathfrak{o}=\mathfrak{p}^{r_i}$ とする．$O(L)=O(M)$ とせよ．$r_1 \geqq r_2+3$ ならば $L\sim M$ か $L^{\#}\sim M$ である．

（証明）補題1によって，$M=\mathfrak{p}^{t_1}x_1+\cdots+\mathfrak{p}^{t_n}x_n$, $O([x_i, x_j])=O([\pi^{t_i}x_i, \pi^{t_j}x_j])$ となる．補題5により，次の一つが成立する．　(1) $t_i=t_j$,　(2) $t_i+r_i=t_j+r_j$,　(3) $r_i=r_j$, $t_i-t_j=\pm 1$,

(4) $r_i+2t_i=r_j+2t_j$, $t_i-t_j=\pm 1$.

$r_1-r_2\geqq 3$ より，$t_1=t_2$ か $t_1+r_1=t_2+r_2$ となる．後者のとき，M の代りに $M^{\#}$ を考えて，$t_1=t_2$ として十分である．$t_3\neq t_1$ として矛盾を出せば，$t_1=\cdots=t_n$ となり $L\sim M$ となる．上の条件より，次の一つが成り立つ：

(a1) $t_1+r_1=t_3+r_3$,　(a2) $r_1=r_3$, $t_1-t_3=\pm 1$,

(a3) $r_1+2t_1=r_3+2t_3$, $t_1-t_3=\pm 1$,

同様にして，次の一つが成り立つ：

(b1) $t_2+r_2=t_3+r_3$,　(b2) $r_2=r_3$, $t_2-t_3=\pm 1$,

(b3) $r_2+2t_2=r_3+2t_3$, $t_2-t_3=\pm 1$.

(ai) と (bj) を組み合せて，いずれも矛盾に至る．

次に，指数 r の重双曲格子を次で定義する：

$$D=H_1\perp \mathfrak{p}H_2,$$

ここで H_1, H_2 はそれぞれ $\mathfrak{p}^{r_i}$-modular な双曲格子である．

重双曲格子Dに対して，次のようなD^+, D^-を考える：

$$D^+=(\{z\in D\,;\,Q(z)\pi^{1-r}\equiv 1 \bmod \mathfrak{p}\}\cup \mathfrak{p}D)$$
$$+(\{z\in \mathfrak{p}^r D^\# \,;\, Q(z)\pi^{1-r}\equiv -1 \bmod \mathfrak{p}\}\cup \mathfrak{p}^{r+1}D^\#),$$
$$D^-=(\{z\in D\,;\,Q(z)\pi^{1-r}\equiv -1 \bmod \mathfrak{p}\}\cup \mathfrak{p}D)$$
$$+(\{z\in \mathfrak{p}^r D^\# \,;\, Q(z)\pi^{1-r}\equiv 1 \bmod \mathfrak{p}\}\cup \mathfrak{p}^{r+1}D^\#)$$

簡単な計算によって，$D=H_1\perp \mathfrak{p}^r H_2$のとき，$D^+=H_1^+\perp H_2^-$，$D^-=H_1^-\perp H_2^+$となることが分る．また次が成り立つ．

<u>補題7</u>　Dを指数rの重双曲格子とすると，$\mathfrak{p}^r D^\#$, D^+, D^-も指数rの重双曲格子となる．更に

(1) $D^{++}=D^{--}=D$, $D^{+-}=D^{-+}=\mathfrak{p}^r D^\#$, $D^{+\#}=\mathfrak{p}^{-r}D^-$, $D^{-\#}=\mathfrak{p}^{-r}D^+$,

(2) $O(D)=O(\mathfrak{p}^r D^\#)=O(D^+)=O(D^-)$.

(証明)　$D=H_1\perp \mathfrak{p}H_2$とかくと$\mathfrak{p}^r D^\#=H_2\perp \mathfrak{p}H_1$，$H_1=[x,y]\cong\langle\pi^{r-1},-\pi^{r-1}\rangle$，$H_2=[u,v]\cong\langle\pi^{r-1},-\pi^{r-1}\rangle$として，$D^+=H_1^+\perp H_2^-=[x,\pi y]\perp[\pi u,v]=[x,v]\perp \mathfrak{p}[u,y]$．従って$D^+$も指数$r$の重双曲格子となる．$D^-$に対しても同様．(1)は，この表し方で計算すればよい．(2)は定理1によって分る．

J_1, J_2は$FJ_1=FJ_2$内の格子とする．J_1とJ_2が指数rの同類であるとは，指数rの重双曲格子Dで

$$D'=J_1\perp\cdots,\quad D''=J_2\perp\cdots,\quad D', D''\in\{D, D^+, D^-, \mathfrak{p}^r D^\#\},$$

をみたすものがある時をいう．

命題3　L, M を V 内の格子とし，M は L－線型でないとする．このとき，$O(L)=O(M)$ であるための必要十分条件は，次の一つが成立することである：

(1) $L \sim H_1'' \perp H_2$，$M \sim \mathfrak{p}H_1 \perp H_2''$，ただし，$H_1, H_2$ はそれぞれ，$\mathfrak{p}^{r-1}$，$\mathfrak{p}^{r}$－modular な双曲格子であり，H'' は H^+ か H^- を表わす．

(2) $L \sim K \perp J_1$，$M \sim K \perp J_2$，ただし，K は $\mathfrak{p}^r$－modular，J_1, J_2 は指数 r の同類である．

（証明）定理1と補題7(4)によって十分性は分る．必要性を示す．補題6によって，L の Jordan 分解は次の形をもつ：

$$L = L_{r-1} \perp L_r \perp L_{r+1}$$

但し，L_s は $\mathfrak{p}^s$－modular か $\{0\}$ である．定理1により

$$M = \mathfrak{p}^s M_{r-1} \perp \mathfrak{p}^t M_r \perp \mathfrak{p}^k M_{r+1}$$

但し，$M_i \in \{L_i, L_i^+, L_i^-\}$，とおける．$M$ が L－線型でないことより，$M_i \neq L_i$ となる $i \in \{r-1, r, r+1\}$ がある．今，$M_{r-1} \neq L_{r-1}$ 且つ $M_r \neq L_r$ ならば，M はその Jordan 分解の中に，少なくとも4つの modular 成分をもち，補題6から $M \sim L$ 又は $M \sim L^\#$ となって，M が L－線型であることに反する．従って次の4つの内の一つが成り立つとしてよい。

(i) $M_r \neq L_r$，$M_{r-1} = L_{r-1} \neq \{0\}$，$M_{r+1} = L_{r+1} \neq \{0\}$，

(ii) $M_r = L_r$，$M_{r-1} \neq L_{r-1}$，$M_{r+1} \neq L_{r+1}$，

(iii) $M_r = L_r$, $M_{r-1} = L_{r-1}$, $M_{r+1} \neq L_{r+1}$,

(iv) $M_r = L_r$, $M_{r-1} \neq L_{r-1}$, $M_{r+1} = L_{r+1}$

先ず (i) の時，定理１から，$s = k+1$, $t = k$ となり，

$$\mathfrak{p}^{-k} M = \mathfrak{o} x \perp \mathfrak{p}(L_{r-1} + \mathfrak{p}^{-1} L_{r+1}) \perp \mathfrak{p} y$$

は $\mathfrak{p}^{-k} M$ の Jordan 分解を与える。但し $L_r = [x, y]$ とする．定理１によって，$L = \mathfrak{o} x \perp \mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p}(L_{r-1} \perp L_{r+1}) \perp \mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p} y$ を考えて，$L_{r-1} \perp \mathfrak{p}^{-1} L_{r+1}$ は双曲格子でなければならない．故に (1) なり．

(ii) の時，定理１により，$i = j = k+1$ となり，

$$\mathfrak{p}^{-i} M = [x, v] \perp L_r \perp \mathfrak{p}[y, u]$$

は $\mathfrak{p}^{-i} M$ の Jordan 分解を与える．但し，$L_{r-1} = [x, y] \cong \langle \pi^{r-1}\varepsilon, -\pi^{r-1}\varepsilon \rangle$ $L_{r+1} = [\pi u, \pi v] \cong \langle \pi^{r+1}\eta, -\pi^{r+1}\eta \rangle$，$\varepsilon, \eta \in \mathfrak{u}$。上と同様にして，$L = [x, \pi v] \perp L_r \perp \mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p}[y, \pi u]$ より，$[x, v]$ と $[y, u]$ は双曲的でなければならず，従ってまた，$\varepsilon\eta \equiv 1 \mod \mathfrak{p}$ である。これは，$K = L_r$, $J_1 = [x, y] \perp \mathfrak{p}[u, v]$, $J_2 = [x, v] \perp \mathfrak{p}[y, u]$ として (2) を与える． (iii) の時，$L_{r-1} \neq \{0\}$ ならば $i = k+1$ か $i = k+2$ となるので，後者ならMの代りに $M^{\#}$ を用いることによって，$i = k+1$ としてよい．従って $L_r \neq \{0\}$ なら $j = k+1$ である。

$$\mathfrak{p}^{-k} M = (L_{r-1} + \mathfrak{o} x) \perp L_r \perp \mathfrak{p} y$$

は $\mathfrak{p}^{-k} M$ の Jordan 分解である。但し $L_{r+1} = [\pi x, \pi y]$．また，$L = (L_{r-1} + \mathfrak{p} x) \perp L_r \perp \mathfrak{p} y$ だから，定理１により，$L_{r-1} + \mathfrak{o} x$ は双曲的となり，$K = L_r$, $J_1 = L_{r-1} \perp \mathfrak{p}[x, y]$, $J_2 = (L_{r-1} + \mathfrak{p} x) \perp \mathfrak{p} y$

として，(2)を得る．(iv) は (iii) と同様に扱える．

命題2と3により次の定理2がえられる。

<u>定理2</u>　L, M を V 内の格子とする．$O(L)=O(M)$ であるための必要十分条件は次の(1)～(4)の内の一つが成立することである:

(1) $L\sim M$,　　(2) $L^{\#}\sim M$,

(3) $L\sim K\perp J_1$, $M\sim K\perp J_2$,　但し，K は $\mathfrak{p}^r$-modular, J_1 と J_2 は指数 r の同類である,

(4) $L\sim H_1''\perp H_2$, $M\sim \mathfrak{p}H_1\perp H_2''$,　但し，$H_1, H_2$ はそれぞれ $\mathfrak{p}^{r-1}$-, $\mathfrak{p}^r$-modular な双曲格子．H_i'' は H_i^+ か H_i^- を表わす．

〈参照文献〉

[1] *A. Kallman, M. Kneser & U. Stuhler*, Invariante Untermoduln quadratischer Moduln, *Crelles J.* 258 (1973), 51–54,

[2] *O. T. O'Meara*, Introduction to quadratic forms, *Springer*, 1963.

[3] *C. R. Riehm*, Orthogonal groups over the integers of a local field, *Amer. J. Math.* 89 (1967), 549–577.